PETA KENDALI MULTIATRIBUT *C* DENGAN PENDEKATAN DISTRIBUSI MULTIVARIAT POISSON

Reny Anggraeni, Erna Tri Herdiana, Nasrah Sirajang
Program Studi Statistika, FMIPA, Universitas Hasanuddin

Abstrak

Kualitas merupakan salah satu faktor utama untuk menjaga loyalitas konsumen terhadap suatu produk. Untuk menghasilkan produk yang berkualitas tinggi, maka dibutuhkan suatu pengendalian proses statistik, salah satunya adalah peta kendali. Umumnya, peta kendali terdiri atas dua kategori yaitu peta kendali variabel dan peta kendali atribut. Jika menentukan suatu kualitas produk yang diklasifikasikan berdasarkan cacat atau ketidaksesuaian maka digunakan peta kendali atribut. Tetapi, jika pemeriksaan mengklasifikasikan produk pada lebih dari dua kategori ketidaksesuaian dan masing-masing kategori memiliki korelasi satu sama lain, maka digunakan peta kendali multiatribut.Pada penelitian ini, dilakukan pengkajian ulang tentang peta kendali multiatribut *c* dengan tiga atribut. Hasilnya digunakan pada data simulasi dan dibandingkan dengan peta kendali multivariat np. Berdasarkan perbandingan tersebut, kesimpulan akhir dari aplikasi ini berbeda, karena peta kendali multivariat np tidak mendeteksi adanya data *out of control*, sedangkan peta kendali multiatribut c mendeteksi adanya satu data *out of control* pada data simulasi yang sama.

Kata Kunci: Peta kendali multiatribut c, Peta kendali multivariate np (MNP), Distribusi Multivariat Poisson

1. Pendahuluan

Secara umum, terdapat dua kategori dalam peta kendali statistika, yaitu peta kendali variabel dan peta kendali atribut. Dalam proses menentukan suatu kualitas produk yang dikategorikan berdasarkan cacat atau ketidaksesuaian, dapat digunakan peta kendali atribut, salah satunya adalah peta kendali *c*. Penerapan peta kendali *c* pada umumnya mengaplikasikan distribusi Poisson pada banyaknya cacat atau ketidaksesuaian pada proses univariat. Tetapi, kebanyakan dalam proses pengendalian mutu, terdapat lebih dari satu karakteristik kualitas yang ditetapkan dalam suatu proses produksi, dimana karakteristik tersebut memiliki korelasi satu sama lain. Dalam kondisi tersebut, maka peta kendali yang digunakan adalah peta kendali multiatribut. Tetapi ketika fokus utama kecacatan berada pada banyaknya cacat masing-masing unit sampel dari suatu proses dan kecacatan diklasifikasikan berdasarkan lebih dari dua kategori, maka digunakan peta kendali multiatribut *c*, dimana data dimodelkan dengan distribusi multivariat Poisson.

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk mengkaji lebih lanjut tentang distribusi multivariat Poisson dan mengaitkan parameter yang ada di dalam distribusi multivariat Poisson dengan peta kendali multiatribut *c*. Kemudian hasil yang telah diperoleh diaplikasikan pada data simulasi yang diasumsikan berdistribusi multivariat Poisson.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Distribusi Poisson

Distribusi Poisson pada umumnya digunakan untuk model data hitung dan diberikan sebagai berikut (Montgomery, 1985):

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\ x = 0,1,2,\dots \tag{1}$$

dengan parameter $\lambda > 0$, dimana rata-rata dan variansi distribusi Poisson keduanya sama dengan parameter λ.

Penerapan yang khas dari distribusi Poisson dalam pengendalian mutu adalah sebagai model untuk banyaknya cacat atau ketidaksesuaian yang terdapat dalam suatu unit produk.

2.2 Distribusi Bivariat Poisson

Johnson, Kotz, dan Balakrishnan (1997) memperkenalkan suatu struktur distribusi multivariat Poisson. Misalkan variabel acak $Y_i, i = 1,2,\dots p$ dan U adalah distribusi Poisson yang saling bebas dengan parameter masing-masing adalah λ_i dan θ_0. Maka variabel acak baru X_i dapat terbentuk sebagai

$$X_i = Y_i + U, \text{ untuk } i=1,2,\dots,p \tag{2}$$

dengan X_i adalah variabel acak Poisson dengan parameter $\lambda_i + \theta_0$, untuk *i=1,2,…,p.*

Fungsi pembangkit peluang bersama $G(s_1, s_2)$ memiliki bentuk

$$\begin{aligned} G(s_1, s_2) &= E(s_1^X s_2^Y) \\ &= exp[(a-d)(s_1-1) + (b-d)(s_2-1) + d(s_1 s_2 - 1)] \end{aligned} \tag{3}$$

Sedangkan fungsi peluang $P(x, y) = P(X = x, Y = y)$ adalah

$$P(x, y) = e^{-(a+b-d)} \sum_{i=0}^{s} \frac{(a-d)^{x-i}(b-d)^{y-i}d^{i}}{(x-i)!(y-i)!i!} \tag{4}$$

dengan $s = min(x_1, x_2)$.

Fungsi peluang bersama dari distribusi multivariat Poisson diberikan oleh

$$\begin{aligned} P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_p = x_p\right) &= P(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ &= exp\left[-\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p + \theta_0\right)\right] \sum_{u=0}^{s} \frac{\theta_0^u}{u!} \frac{\lambda_1^{x_1-u}}{(x_1-u)!} \cdots \frac{\lambda_p^{x_p-u}}{(x_p-u)!} \end{aligned} \tag{5}$$

dengan $s = \min(x_1, \dots, x_p)$.

2.3 Peta Kendali Atribut

Secara umum, peta kendali sifat (atribut) terbagi atas dua kelompok, yaitu yang berdasarkan distribusi Binomial dan distribusi Poisson. Kelompok pengendali untuk bagian ketidaksesuaian, didasarkan pada distribusi Binomial. Sedangkan yang berdasarkan distribusi Poisson adalah peta kendali untuk banyaknya cacat/ ketidaksesuaian (peta kendali *c*). Menurut Mukhopandhyay (2008), jika pemeriksaan obyek secara atribut dilakukan pada lebih dari satu karakteristik kualitas, maka peta kendali yang digunakan adalah peta kendali multivariat atribut.

Lu, dkk (1998) membangun suatu peta kendali multivariat *np* (*MNP)* dengan menggunakan prinsip umum peta kendali Shewhart. Sehingga garis pusat dan batas kendali dari peta kendali MNP Shewhart dapat ditentukan menggunakan

$$UCL = n\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\bar{p}_j} + 3 \times \sqrt{n\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(1-\bar{p}_j\right) + 2\sum_{i<j}\left(\delta_{ij}\sqrt{(1-\bar{p}_i)\left(1-\bar{p}_j\right)}\right)\right\}}$$

$$CL = n\sum_{j=1}^{m}\sqrt{p_j}$$

$$LCL = n\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\bar{p}_j} - 3 \times \sqrt{n\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(1-\bar{p}_j\right) + 2\sum_{i<j}\left(\delta_{ij}\sqrt{(1-\bar{p}_i)\left(1-\bar{p}_j\right)}\right)\right\}}. \quad (6)$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Distribusi Multivariat Poisson

Asumsikan bahwa terdapat karakteristik kualitas sebanyak j, dimana $j = 1,2,\ldots,p$. Kemudian variabel X_j merupakan banyaknya cacat atau ketidaksesuaian dengan karakteristik kualitas j. Diasumsikan data $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ mengikuti distribusi Poisson dengan p-variat. Masing-masing X_j memiliki distribusi marginal dengan mean λ_j. Kovariansi antara dua variabel (X_j, X_k) dimana $j \neq k$ adalah θ_0.

Didefinisikan statistik D sebagai jumlah dari seluruh variabel X_j atau

$$D = \sum_{j=1}^{p} x_j\,, \quad j = 1,2,\ldots,p. \quad (7)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa distribusi dari D adalah berdistribusi multivariat Poisson.

Untuk kasus $p = 2$, misalkan (X_1, X_2) merupakan peubah acak yang berdistribusi Poisson dengan dua variabel. Jika $X_1 = X_1' + U$ dan $X_2 = X_2' + U$, dimana X_1', X_2' dan U adalah variabel-variabel berdistribusi Poisson yang saling bebas dengan parameter secara berturut-turut adalah $a' = a - z$, $b' = b - z$, dan z.

Adapun *mean* dan variansi dari variabel X_1 adalah:

$$E(X_1) = \sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 p(x_1) = \sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 e^{-a}\frac{a^{x_1}}{x_1!} = e^{-a} a e^{a} = a. \quad (8)$$

dan

$$Var(X_1) = E\left({X_1}^2\right) - [E(X_1)]^2$$
$$= a. \quad (9)$$

Sedangkan *mean* dan variansi dari variabel X_2 adalah:

$$E(X_2) = \sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 p(x_2) = \sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 e^{-b}\frac{b^{x_2}}{x_2!} = e^{-b} b e^{b} = b. \quad (10)$$

dan

$$Var(X_2) = E\left({X_2}^2\right) - [E(X_2)]^2$$
$$= b. \quad (11)$$

Maka distribusi marginal dari X_1 dan X_2 adalah distribusi Poisson dengan parameter a dan b.

Jika $X_1 \sim \mathcal{P}(a' + z)$ dan $X_2 \sim \mathcal{P}(b' + z)$, maka akan dicari distribusi dari $x_1 + x_2$.

Misalkan $D = x_1 + x_2$. Fungsi pembangkit peluang dari D adalah $G_D(s)$:

$$\begin{aligned} G_D(s) &= G_{x_1+x_2}(s) = E[s^{x_1+x_2}] \\ &= E\left[s^{x_1'+u+x_2'+u}\right] \\ &= E\left[s^{x_1'}\right]E\left[s^{x_2'}\right]E[s^{2u}] \\ &= exp[(a-z)(s-1)+(b-z)(s-1)+z(s^2-1)] \end{aligned} \tag{12}$$

Sehingga, bentuk fungsi distribusi peluang dari D= $x_1 + x_2$ mengikuti:

$$P(D=d) = exp[-(a+b-z]\sum_{i=0}^{\frac{d}{2}} \frac{(a+b-2z)^{d-2i}z^i}{(d-2i)!i!}, d = 0,1,2,\ldots\infty. \tag{13}$$

Untuk kasus $p = 3$, misalkan (X_1, X_2, X_3) merupakan peubah acak yang berdistribusi Poisson dengan tiga variabel. Jika $X_1 = X_1^{'} + U$, $X_2 = X_2^{'} + U$ dan $X_3 = X_3^{'} + U$, dimana $X_1^{'}, X_2^{'}, X_3^{'}$ dan U adalah variabel-variabel berdistribusi Poisson yang saling bebas dengan parameter secara berturut-turut adalah $a' = a - z$, $b' = b - z$, $c' = c - z$ dan z.

Adapun *mean* dan variansi dari variabel X_1 adalah:

$$E(X_1) = \sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 p(x_1) = \sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 e^{-a}\frac{a^{x_1}}{x_1!} = e^{-a}ae^{a} = a. \tag{14}$$

dan

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= E\left({X_1}^2\right) - [E(X_1)]^2 \\ &= a. \end{aligned} \tag{15}$$

Kemudian *mean* dan variansi dari variabel X_2 adalah:

$$E(X_2) = \sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 p(x_2) = \sum_{x_2=0}^{\infty} x_2 e^{-b}\frac{b^{x_2}}{x_2!} = e^{-b}be^{b} = b. \tag{16}$$

dan

$$\begin{aligned} Var(X_2) &= E\left({X_2}^2\right) - [E(X_2)]^2 \\ &= b. \end{aligned} \tag{17}$$

Sedangkan *mean* dan variansi dari variabel X_3 adalah:

$$E(X_3) = \sum_{x_3=0}^{\infty} x_3 p(x_3) = \sum_{x_3=0}^{\infty} x_3 e^{-c}\frac{c^{x_3}}{x_3!} = e^{-c}ce^{c} = c. \tag{18}$$

dan

$$\begin{aligned} Var(X_3) &= E\left({X_3}^2\right) - [E(X_3)]^2 \\ &= c. \end{aligned} \tag{19}$$

Maka distribusi marginal dari X_1, X_2 dan X_3 adalah distribusi Poisson dengan parameter a, b, dan c.

Jika $X_1 \sim \mathcal{P}(a' + z), X_2 \sim \mathcal{P}(b' + z)$ dan $X_3 \sim \mathcal{P}(c' + z)$, maka akan dicari distribusi dari $x_1 + x_2 + x_3$.

Misalkan $D = x_1 + x_2 + x_3$. Fungsi pembangkit peluang dari *D* adalah $G_D(s)$:

$$G_D(s) = G_{x_1+x_2+x_3}(s) = E[s^{x_1+x_2+x_3}]$$
$$= E\left[s^{x_1'+u+x_2'+u+x_3'+u}\right]$$
$$= E\left[s^{x_1'}\right]E\left[s^{x_2'}\right]E\left[s^{x_3'}\right]E[s^{3u}]$$
$$= exp[(a-z)(s-1) + (b-z)(s-1) + (c-z)(s-1) + z(s^3-1)] \quad (20)$$

Sehingga, bentuk fungsi distribusi peluang dari *D*= $x_1 + x_2 + x_3$ mengikuti:

$$P(D = d) = exp[-(a+b+c-2z]\sum_{i=0}^{\frac{d}{3}} \frac{(a+b+c-3z)^{d-3i}z^i}{(d-3i)!i!} d = 0,1,2,\ldots\infty. \quad (21)$$

Untuk menentukan *UCL* dan *LCL* dari suatu peta kendali dengan menggunakan prinsip peta kendali Shewhart, terlebih dahulu dengan menentukan *mean* dan variansi dari statistik *D*, yaitu:

$$E(D) = E\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right) = \sum_{j=1}^{p} E(x_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \quad (22)$$

dan

$$Var(D) = Var\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right) = \sum_{j=1}^{p} var(x_j) + 2\sum_{j<k} cov(x_j, x_k)$$
$$= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j + 2\sum_{j<k} \rho_{jk}\sqrt{\lambda_j\lambda_k} \quad (23)$$

dimana λ_j merupakan *mean* ke-*j* dari jenis cacat atau ketidaksesuaian dan ρ_{jk} adalah koefisien korelasi antara X_j dan X_k.

Sehingga, batas kendali jenis Shewhart dan garis tengah (*CL*) ditunjukkan sebagai berikut:

$$UCL = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j + 3\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j + 2\sum_{j<k} \rho_{jk}\sqrt{\lambda_j\lambda_k}\right)^{1/2}$$
$$CL = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$$
$$LCL = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j - 3\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j + 2\sum_{j<k} \rho_{jk}\sqrt{\lambda_j\lambda_k}\right)^{1/2} \quad (24)$$

3.2 Aplikasi Peta Kendali Multiatribut *c*

Dari data simulasi pada jurnal Chio dan Kuo (2008), terdapat tiga variabel karakteristik ($p = 3$) dan jumlah sampel ($n = 26$), yang masing-masing disimbolkan dengan X_1, X_2, X_3. Ketiga variabel karakteristik tersebut masing-masing mengikuti distribusi Poisson dengan *mean*:

$$\lambda_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1i} = \frac{1}{26}[2 + 1 + \cdots + 1] = 1{,}12.$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i} = \frac{1}{26}[1 + 1 + \cdots + 0] = 0{,}92.$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{3i} = \frac{1}{26}[0 + 1 + \cdots + 1] = 1{,}35.$$

Sedangkan koefisien korelasi ρ_{ij} dapat diketahui dengan mengikuti persamaan dari

$$\rho_{ij} = \frac{cov(x_i, x_j)}{\sqrt{var(x_i)var(x_j)}} \qquad (25)$$

sehingga, koefisien korelasi antarvariabel adalah:

$$\rho_{12} = \frac{cov(x_1, x_2)}{\sqrt{var(x_1)var(x_2)}} = \frac{0{,}36}{1{,}17} = 0{,}31$$

$$\rho_{13} = \frac{cov(x_1, x_3)}{\sqrt{var(x_1)var(x_3)}} = \frac{0{,}50}{1{,}32} = 0{,}38$$

$$\rho_{23} = \frac{cov(x_2, x_3)}{\sqrt{var(x_2)var(x_3)}} = \frac{0{,}8}{1{,}22} = 0{,}66.$$

Kemudian, peta kendali multiatribut c dibentuk dengan:

$$UCL = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 3\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 2\left(\rho_{12}\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + \rho_{13}\sqrt{\lambda_1\lambda_3} + \rho_{23}\sqrt{\lambda_2\lambda_3}\right)}$$

$$= 3{,}38 + 3\sqrt{3{,}38\ + 2(0{,}31(1{,}01) + 0{,}38(1{,}22) + 0{,}66(1{,}11))}$$

$$= 3{,}38 + 7{,}59 = 10{,}97.$$

$$CL = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$= 1{,}12 + 0{,}92 + 1{,}35 = 3{,}38$$

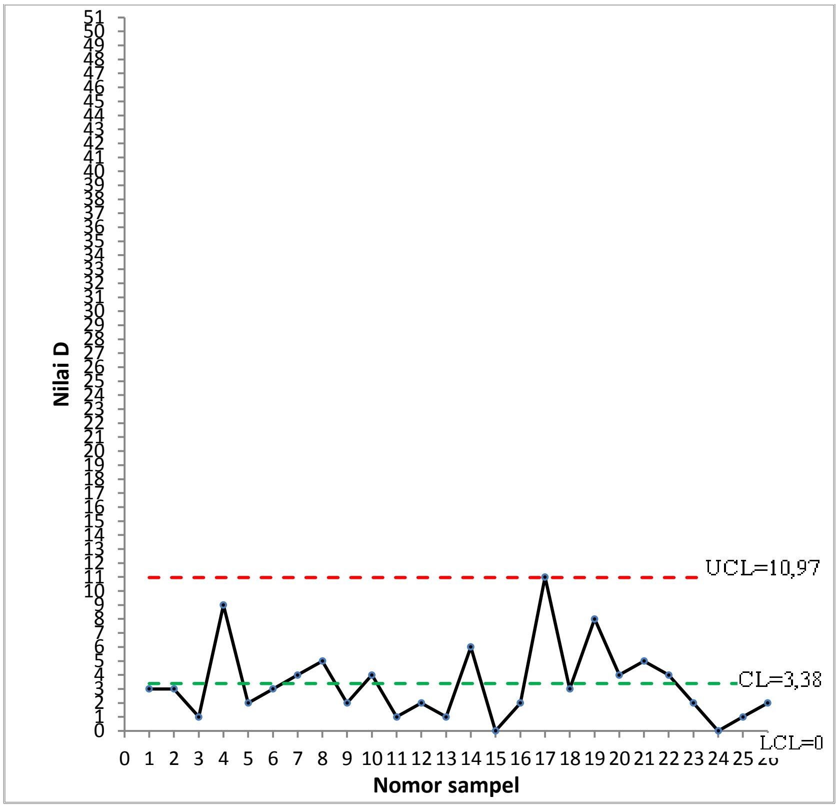
$$LCL = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - 3\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 2\left(\rho_{12}\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + \rho_{13}\sqrt{\lambda_1\lambda_3} + \rho_{23}\sqrt{\lambda_2\lambda_3}\right)}$$

$$= 3{,}38 - 3\sqrt{3{,}38\ + 2(0{,}31(1{,}01) + 0{,}38(1{,}22) + 0{,}66(1{,}11))}$$

$$= 3{,}38 - 7{,}59 = -4{,}21.$$

Karena hasil perhitungan menghasilkan LCL yang bernilai negatif, maka ambil $LCL = 0$. (Montgomery, 1985).

Selanjutnya dengan memplot statistik D berdasarkan kedua batas tersebut, maka dihasilkan gambar seperti pada gambar 2.1.



Gambar 2.1 Peta kendali multiatribut *c* pada data simulasi

Gambar 2.1 menunjukkan adanya titik yang berada di luar batas kendali, yaitu titik 17 dengan $D = 11$ dan $UCL = 10{,}97$, serta $\alpha = 0{,}0027$.

3.3 Perbandingan dengan Peta Kendali MNP

Dari data simulasi pada jurnal Chio dan Kuo (2008), terdapat 3 vektor bagian ketidaksesuaian, yaitu $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3})$. Adapun parameter yang diketahui, yaitu: $n = 26$, $m = 3$ dan $k = 20$ dimana,

n: ukuran sampel

m merupakan banyaknya karakteristik untuk ketidaksesuaian

k: sampel awal

sehingga, rata-rata untuk bagian ketidaksesuaian diperoleh:

$$\overline{p_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{1i}}{nk} = \frac{29}{520} = 0{,}06.$$

$$\overline{p_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{2i}}{nk} = \frac{24}{520} = 0{,}05.$$

$$\overline{p_3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{3i}}{nk} = \frac{35}{520} = 0{,}07.$$

Sedangkan koefisien korelasi antarvariabel adalah:

$$\overline{\delta_{12}} = \overline{\delta_{21}} = 0{,}31$$

$$\overline{\delta_{13}} = \overline{\delta_{31}} = 0{,}38$$
$$\overline{\delta_{23}} = \overline{\delta_{32}} = 0{,}66.$$

Sehingga, batas kendali *UCL* dan *LCL* dapat dihitung:

$$UCL = n\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\overline{p_j}} + 3 \times \sqrt{n\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(1-\overline{p_j}\right) + 2\sum_{i<j}\left(\delta_{ij}\sqrt{\left(1-\overline{p_i}\right)\left(1-\overline{p_j}\right)}\right)\right\}}$$

$$= 26\left[\sqrt{\overline{p_1}} + \sqrt{\overline{p_2}} + \sqrt{\overline{p_3}}\right] + 3 \times \sqrt{26\left\{\begin{array}{c}(1-\overline{p_1}) + (1-\overline{p_2}) + (1-\overline{p_3}) + \\ 2\left[\begin{array}{c}\left(\delta_{12}\sqrt{(1-\overline{p_1})(1-\overline{p_2})}\right) + \left(\delta_{13}\sqrt{(1-\overline{p_1})(1-\overline{p_3})}\right) + \\ \left(\delta_{23}\sqrt{(1-\overline{p_2})(1-\overline{p_3})}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}}$$

$$= 26\left[\sqrt{0{,}06} + \sqrt{0{,}05} + \sqrt{0{,}07}\right] + 3 \times \sqrt{26\left\{\begin{array}{c}(1-0{,}06) + (1-0{,}05) + (1-0{,}07) + \\ 2\left[\begin{array}{c}\left(0{,}3\sqrt{(1-0{,}06)(1-0{,}05)}\right) + \left(0{,}4\sqrt{(1-0{,}06)(1-0{,}07)}\right) + \\ \left(0{,}6\sqrt{(1-0{,}05)(1-0{,}07)}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}}$$

$$= 18{,}47 + 31{,}61 = 50{,}08.$$

$$CL = n\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\overline{p_j}}$$

$$= 26\left[\sqrt{0{,}06} + \sqrt{0{,}05} + \sqrt{0{,}07}\right] = 18{,}47.$$

$$LCL = n\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\overline{p_j}} - 3 \times \sqrt{n\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(1-\overline{p_j}\right) + 2\sum_{i<j}\left(\delta_{ij}\sqrt{\left(1-\overline{p_i}\right)\left(1-\overline{p_j}\right)}\right)\right\}}$$

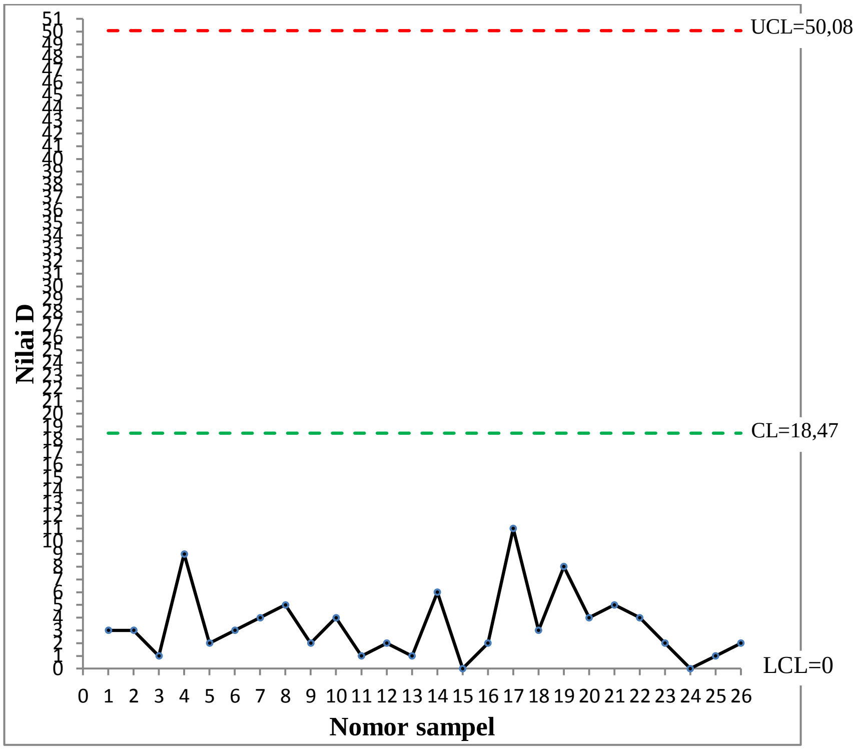
$$= 26\left[\sqrt{\overline{p_1}} + \sqrt{\overline{p_2}} + \sqrt{\overline{p_3}}\right] - 3 \times \sqrt{26\left\{\begin{array}{c}(1-\overline{p_1}) + (1-\overline{p_2}) + (1-\overline{p_3}) + \\ 2\left[\begin{array}{c}\left(\delta_{12}\sqrt{(1-\overline{p_1})(1-\overline{p_2})}\right) + \left(\delta_{13}\sqrt{(1-\overline{p_1})(1-\overline{p_3})}\right) + \\ \left(\delta_{23}\sqrt{(1-\overline{p_2})(1-\overline{p_3})}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}}$$

$$= 26\left[\sqrt{0{,}06} + \sqrt{0{,}05} + \sqrt{0{,}07}\right] - 3 \times \sqrt{26\left\{\begin{array}{c}(1-0{,}06) + (1-0{,}05) + (1-0{,}07) + \\ 2\left[\begin{array}{c}\left(0{,}3\sqrt{(1-0{,}06)(1-0{,}05)}\right) + \left(0{,}4\sqrt{(1-0{,}06)(1-0{,}07)}\right) + \\ \left(0{,}6\sqrt{(1-0{,}05)(1-0{,}07)}\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}}$$

$$= 18{,}47 - 31{,}61 = -13{,}14.$$

Karena hasil perhitungan menghasilkan *LCL* yang bernilai negatif, maka ambil $LCL = 0$. (Montgomery, 1985).

UCL=50,08



Gambar 2.2 Peta kendali MNP pada data simulasi

Dari peta kendali MNP yang ditampilkan pada gambar 2.2, terlihat bahwa peta kendali MNP tidak mendeteksi adanya titik yang berada di luar batas kendali, termasuk pada titik ke-17, yang dideteksi berada di luar kendali pada peta kendali multiatribut *c*.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Batas kendali atas jenis Shewhart untuk peta kendali multiatribut *c* adalah jumlahan dari setiap parameter dari distribusi Poisson yang terlibat ditambah tiga yang dikalikan dengan setengah dari nilai variansi distribusi multivariat Poisson.
2. Batas kendali bawah jenis Shewhart untuk peta kendali multiatribut *c* adalah jumlahan dari setiap parameter dari distribusi Poisson yang terlibat dikurangi tiga yang dikalikan dengan setengah dari nilai variansi distribusi multivariat Poisson.
3. Dalam penelitian ini, peta kendali multiatribut *c* dengan pendekatan multivariat Poisson mendeteksi adanya titik yang berada di luar batas kendali, sedangkan peta kendali multivariat np (MNP) tidak mendeteksi adanya titik yang berada di luar batas kendali.

4.2 Saran

Penelitian ini masih terbatas dengan hanya menentukan peta kendali multiatribut *c* dengan pendekatan multivariat Poisson pada data simulasi tanpa menguji kinerja peta kendali tersebut. Sehingga, untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk menguji kinerja peta kendali guna mengetahui bagus atau tidaknya suatu peta kendali bekerja, salah satunya dengan menggunakan ARL (*average run length*).

DAFTAR PUSTAKA

Chiu, J. E., & Kuo, T. I. (2007). Attribute control chart for multivariate Poisson distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *37*(1), 146-158.

Holgate, P. (1964). Estimation for the bivariate Poisson distribution. *Biometrika*, *51*(1-2), 241-287.

Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1997). *Discrete multivariate distributions* (Vol. 165). New York: Wiley.

Johnson, Richard A. & Wichern, Dean W..(2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. USA: Pearson Prantice Hall.

Larpkiattaworn, Siripen, (2003). A Neural Network Approach for Multi-Attribute Process Control With Comparison of Two Current Techniques and Guideleines for Practical Use. *Disertasi.* University of Pittsburgh.

Lu, X. S. (1998). Control chart for multivariate attribute processes. *International Journal of Production Research*, *36*(12), 3477-3489.

Montgomery, Douglas C. (1998), *Pengendalian Kualitas Statistika (*Zanzawi Soejoeti, Penerjemah). Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Ranjan Mukhopadhyay, A. (2008). Multivariate attribute control chart using Mahalanobis D^2 statistic. *Journal of Applied Statistics*, *35*(4), 421-429.